13
अध्याय

सीमा और अवकलज
Limits and Derivatives

प्रश्नावली 13.1

निर्देश (प्र. सं. 1 - 22) निम्नलिखित सीमाओं के मान ज्ञात कीजिए।

(प्र. सं. 1-5) हम दिए हुए फलन में सीमा प्रत्यक्ष रूप में रखेंगे।

प्रश्न 1. $\lim_{x \to 3} x + 3$

हल $\lim_{x \to 3} x + 3 = 3 + 3 = 6$

प्रश्न 2. $\lim_{x \to \pi} \left(x - \frac{22}{7}\right)$

हल $\lim_{x \to \pi} \left(x - \frac{22}{7}\right) = \pi - \frac{22}{7}$

प्रश्न 3. $\lim_{r \to 1} \pi r^2$

हल $\lim_{r \to 1} \pi r^2 = \pi \times (1)^2 = \pi$

प्रश्न 4. $\lim_{x \to 4} \frac{4x+3}{x-2}$

हल $\lim_{x \to 4} \frac{4x+3}{x-2} = \frac{4 \times 4 + 3}{4-2} = \frac{19}{2}$

प्रश्न 5. $\lim_{x \to -1} \frac{x^{10} + x^5 + 1}{x-1}$

हल $\lim_{x \to -1} \frac{x^{10} + x^5 + 1}{x-1} = \frac{(-1)^{10} + (-1)^5 + 1}{-1-1} = \frac{1-1+1}{-2} = -\frac{1}{2}$

प्रश्न 6. $\lim_{x \to 0} \frac{(x+1)^5 - 1}{x}$

यहाँ हम दिए हुए फलन में प्रत्यक्ष रूप से सीमा नहीं रख सकते क्योंकि यह $\left(\frac{0}{0}\right)$ रूप देता है। अतः यहाँ सूत्र $\lim_{x \to 0} \frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$ का प्रयोग करेंगे।

हल $\lim_{x \to 0} \frac{(x+1)^5 - 1}{x}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ रूप}\right)$

माना $x + 1 = h$

जब $x \to 0$, तब $h \to 1$

$\therefore \quad \lim_{h \to 1} \frac{h^5 - 1}{h-1} = \lim_{h \to 1} \frac{h^5 - 1^5}{h-1} = \lim_{h \to 1} 5(h)^{5-1} = 5 \times 1^4 = 5$

नोट *विद्यार्थियों को सीमा को परिवर्तित करना नहीं भूलना चाहिए।*

प्रश्न 7. $\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4}$

प्रत्यक्ष रूप से $x = 2$ का मान नहीं रखा जा सकता है क्योंकि यह $\left(\frac{0}{0}\right)$ रूप देता है। अतः पहले अंश तथा हर के गुणनखंड करते हैं और उभयनिष्ठ गुणनखंड को काट देते हैं तथा जब अनिर्धार्य रूप अर्थात् $\left(\frac{0}{0}\right)$ रूप हट जाए, तब x का मान रखते हैं।

हल $\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - (6-5)x - 10}{(x-2)(x+2)}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ रूप}\right)$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 6x + 5x - 10}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{3x(x-2) + 5(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(3x+5)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{3x+5}{x+2} = \frac{3 \times 2 + 5}{2+2} = \frac{6+5}{4} = \frac{11}{4}$$

> **नोट** *सीमा में उभयनिष्ठ गुणनखंड को निरस्त करेंगे। किंतु फलन में आप प्रत्यक्ष रूप से उभयनिष्ठ गुणनखंड को निरस्त नहीं कर सकते जब तक यह फलन अनिघार्य रूप अर्थात् $\left(\frac{0}{0}\right)$ रूप का हो।*

प्रश्न 8. $\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{2x^2 - 5x - 3}$.

इसके लिए पहले अंश तथा हर का गुणनखंड कर उभयनिष्ठ गुणनखंड को काट देते हैं तथा जब अनिधार्य रूप अर्थात् $\frac{0}{0}$ रूप हट जाए, तो x का मान रखते हैं।

हल $\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{2x^2 - 5x - 3}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ रूप}\right)$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x^2 - 9)(x^2 + 9)}{2x^2 - 6x + x - 3} \qquad [\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)}{2x(x - 3) + 1(x - 3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)}{(x - 3)(2x + 1)} = \lim_{x \to 3} \frac{(x + 3)(x^2 + 9)}{2x + 1}$$

$$= \frac{(3 + 3)(3^2 + 9)}{2 \times 3 + 1} = \frac{6 \times 18}{7} = \frac{108}{7}$$

प्रश्न 9. $\lim_{x \to 0} \frac{ax + b}{cx + 1}$

हल $\lim_{x \to 0} \frac{ax + b}{cx + 1} = \frac{a \times 0 + b}{c \times 0 + 1} = \frac{b}{1} = b$

प्रश्न 10. $\lim_{z \to 1} \frac{z^{1/3} - 1}{z^{1/6} - 1}$

इसे सूत्र $\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = a^{n-1}$ का प्रयोग करके हल किया जा सकता है।

हल $\lim_{z \to 1} \frac{z^{1/3} - 1}{z^{1/6} - 1} = \lim_{z \to 1} \frac{z^{1/3} - 1}{z - 1} \times \frac{z - 1}{z^{1/6} - 1} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)(1)^{\frac{1}{3} - 1}}{\left(\frac{1}{6}\right)(1)^{\frac{1}{6} - 1}} = \frac{6}{3} \times 1 = 2$

प्रश्न 11. $\lim_{x \to 1} \frac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + bx + a}$, $a + b + c \neq 0$.

हल $\lim_{x \to 1} \frac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + bx + a} = \frac{a \times (1)^2 + b \times 1 + c}{c \times (1)^2 + b \times 1 + a} = \frac{a + b + c}{c + b + a} = 1$

नोट *यदि a + b + c = 0, तब दी हुई सीमा $\left(\frac{0}{0}\right)$ रूप की है जो ज्ञात नहीं किया जा सकती।*

प्रश्न 12. $\lim_{x \to -2} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}{x + 2}$

हल $\lim_{x \to -2} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(2 + x)}{2x(x + 2)} = \lim_{x \to -2} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2(-2)} = -\frac{1}{4}$

प्रश्न 13. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx}$

(प्र. सं. 13 - 15) यहाँ हम दी गई सीमा को मानक रूप में बदलेंगे तथा परिणाम $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ या $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ का प्रयोग करेंगे।

हल $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \to 0} \frac{(a)\sin ax}{b(ax)}$ (अंश तथा हर को a से गुणा करने पर)

$= \frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b}$ $\left(\because \lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1\right)$

प्रश्न 14. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$

हल $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$

अंश तथा हर को $(ax)(bx)$ से गुणा करने पर,

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} \times \frac{b\ x}{\sin b\ x} \times \frac{ax}{b\ x} = 1 \times 1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ $\left(\because \lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} = \lim_{x \to 0} \frac{b\ x}{\sin b\ x} = 1\right)$

प्रश्न 15. $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi(\pi - x)}$

हल $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi(\pi - x)}$

माना $\pi - x = h$, जब $x \to \pi$, तब $h \to 0$

$\Rightarrow$ $\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{\pi h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\pi} \times \frac{\sin h}{h} = \frac{1}{\pi} \times 1 = \frac{1}{\pi}$ $\left(\because \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1\right)$

प्रश्न 16. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\pi - x}$

हल $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\pi - x} = \frac{\cos 0}{\pi - 0} = \frac{1}{\pi}$ $(\because \cos 0 = 1)$

प्रश्न 17. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1}$

सीमा रखने पर यह फलन अनिधार्य रूप धारण करता है, ऐसे फलन को हल करने के लिए सर्वप्रथम सूत्र $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$ का प्रयोग कर सरल करते हैं और सीमा रखते हैं।

हल $\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}$

$$\left(\because 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x \text{ तथा } 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)$$

अंश तथा हर को x^2 से गुणा करने पर और बाद में अंश को $\frac{4}{4}$ से गुणा करने पर

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{4 \times \frac{x^2}{4}}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right)^2 \times 4 = 1 \times 1 \times 4 = 4$$

प्रश्न 18. $\lim_{x \to 0} \frac{ax + x \cos x}{b \sin x}$

हल $\lim_{x \to 0} \frac{ax + x \cos x}{b \sin x}$

प्रत्येक पद को x से भाग करने पर,

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{ax}{x} + \frac{x \cos x}{x}}{\frac{b \sin x}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{a + \cos x}{b \left(\frac{\sin x}{x}\right)}$$

$$= \frac{a + \cos 0}{b \times 1} = \frac{a + 1}{b} \qquad \left(\because \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right)$$

> **नोट** *कई बार जब हम सीमा रखते हैं तो, हमें अनिधार्य रूप* $\left(\frac{0}{0}\right)$ *प्राप्त होता है। ऐसे फलन को सर्वप्रथम विस्तार कर या सूत्र को प्रयोग कर फलन के अनिधार्य रूप* $\left(\frac{0}{0}\right)$ *को हटाते हैं।*

प्रश्न 19. $\lim_{x \to 0} x \sec x$

हल $\lim_{x \to 0} x \sec x = 0 \times \sec 0 = 0 \times 1 = 0$

प्रश्न 20. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax + bx}{ax + \sin bx}$, a, b तथा $a + b \neq 0$

हल $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax + bx}{ax + \sin bx}$

प्रत्येक पद को x से भाग करने पर,

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin ax}{x} + \frac{bx}{x}}{\frac{ax}{x} + \frac{\sin bx}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{a \sin ax}{ax} + b}{a + \frac{b \sin bx}{bx}}$$

$$= \frac{a \times 1 + b}{a + b \times 1} = \frac{a + b}{a + b} = 1 \qquad \left(\because \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right)$$

प्रश्न 21. $\lim_{x \to 0} (\operatorname{cosec} x - \cot x)$

प्रत्यक्ष रूप से सीमा रखने पर यदि फलन परिभाषित नहीं होता है, तब इस प्रकार के प्रश्न को हल करने के लिए हम सूत्र $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$ तथा $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ का प्रयोग कर इसे सरल करते हैं और फिर सीमा रखने पर हम अभीष्ट परिणाम पाते हैं।

हल $\lim_{x \to 0} (\operatorname{cosec} x - \cot x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \tan \frac{x}{2} = \tan 0 = 0$$

प्रश्न 22. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{x - \frac{\pi}{2}}$

हल दिया है, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{x - \frac{\pi}{2}}$

माना $x - \frac{\pi}{2} = h$

जब $x \to \frac{\pi}{2}$, तब $h \to 0$

$\therefore$ दी गई सीमा $= \lim_{h \to 0} \frac{\tan 2\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\tan(\pi + 2h)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\tan 2h}{h} \qquad (\because \tan(\pi + \theta) = \tan \theta)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\tan 2h}{2h} = 2 \times 1 = 2 \qquad \left(\because \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1\right)$$

नोट *विद्यार्थी जब चर में परिवर्तन करते हैं, तो उन्हें सीमा में परिवर्तन करना नहीं भूलना चाहिए।*

प्रश्न 23. $\lim_{x \to 0} f(x)$ **और** $\lim_{x \to 1} f(x)$ **ज्ञात कीजिए, जहाँ** $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \le 0 \\ 3(x + 1), & x > 0 \end{cases}$

(प्र. सं. 23 - 28) चूँकि फलन वर्गीकृत रूप में दिया हुआ है। अतः हम सीमा की अस्तित्व जाँच करने के लिए दाएँ पक्ष की सीमा तथा बाएँ पक्ष की सीमा x के विशेष मान के लिए निकालेंगे।

हल दिया है, $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \le 0 \\ 3(x + 1), & x > 0 \end{cases}$

$x = 0$ पर, $f(0) = 3$

दाएँ पक्ष की सीमा (RHL) $= \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0 + h)$

$$= \lim_{h \to 0} 3(0+h+1) = 3(0+0+1) = 3 \times 1 = 3$$

बाएँ पक्ष की सीमा (LHL) $= \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0-h)$

$$= \lim_{h \to 0} 2(0-h)+3 = 2(0-0)+3 = 3$$

$\Rightarrow$ दाएँ पक्ष की सीमा = बाएँ पक्ष की सीमा = $f(0)$

यहाँ, $x = 0$ पर सीमा का अस्तित्व है।

बिंदु $x = 1$, पर दाएँ पक्ष की सीमा $= \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1+h)$

$= \lim_{h \to 0} 3(1+h+1)$ ($x = 1+h$ रखने पर)

$= 3(1+0+1) = 6$

बाएँ पक्ष की सीमा $= \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1-h)$ ($x = 1-h$ रखने पर)

$= \lim_{h \to 0} 3(1-h+1) = 3(1-0+1) = 6$

तथा $f(1) = 3(1+1) = 6$

अतः दाएँ पक्ष की सीमा = बाएँ पक्ष की सीमा

$\therefore$ सीमा का अस्तित्व है।

प्रश्न 24. $\lim_{x \to 1} f(x)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \le 1 \\ -x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$.

हल दिया है, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \le 1 \\ -x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$

$x = 1$, पर

दाएँ पक्ष की सीमा $= \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1+h) = \lim_{h \to 0} -(1+h)^2 - 1$

($x = 1+h$ रखने पर)

$= -(1+0)^2 - 1 = -1 - 1 = -2$

बाएँ पक्ष की सीमा $= \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1-h)$ ($x = 1-h$ रखने पर)

$= \lim_{h \to 0} (1-h)^2 - 1 = (1-0)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow$ दाएँ पक्ष की सीमा $\ne$ बाएँ पक्ष की सीमा

अतः, बिंदु $x = 1$ पर सीमा का अस्तित्व नहीं है।

प्रश्न 25. $\lim_{x \to 0} f(x)$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

यहाँ हम निरपेक्ष फलन x की परिभाषा का प्रयोग करेंगे अर्थात् $|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

हल दिया है, $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

बिंदु $x = 0$ पर,

दाएँ पक्ष की सीमा $= \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0+h) = \lim_{h \to 0} \frac{|0+h|}{(0+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{(0+h)}{(0+h)} = 1$

बाएँ पक्ष की सीमा $= \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0-h)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0-h|}{0-h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(0-h)}{(0-h)} = -1$$

$\Rightarrow$ दाएँ पक्ष की सीमा $\neq$ बाएँ पक्ष की सीमा

अतः बिंदु $x = 0$ पर सीमा का अस्तित्व नहीं है।

> **नोट** *हमें सीमा का मान ध्यानपूर्वक रखना चाहिए, कभी-कभी LHL ≠ RHL अतः LHL तथा RHL दोनों का मान ज्ञात करना चाहिए।*

प्रश्न 26. $\lim_{x \to 0} f(x)$, जहाँ $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

हल दिया है, $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$x = 0$ पर, $\text{RHL} = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0+h) = \lim_{h \to 0} \frac{0+h}{|0+h|} = \lim_{h \to 0} \frac{0+h}{(0+h)} = 1$

$\text{LHL} = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0-h)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(0-h)}{|0-h|} = \lim_{h \to 0} \frac{(0-h)}{-(0-h)} = -1$$

$\Rightarrow$ दाएँ पक्ष की सीमा $\neq$ बाएँ पक्ष की सीमा

अतः बिंदु $x = 0$ पर सीमा का अस्तित्व नहीं है।

प्रश्न 27. $\lim_{x \to 5} f(x)$ **ज्ञात कीजिए जहाँ** $f(x) = |x| - 5$.

हल दिया है, $f(x) = |x| - 5$

हम जानते हैं कि, $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} |x| - 5 = x - 5 = 5 - 5 = 0 \qquad (\because x \to 5 \text{ पर } |x| = x)$$

प्रश्न 28. **मान लीजिए** $f(x) = \begin{cases} a + bx, & x < 1 \\ 4, & x = 1 \\ b - ax, & x > 1 \end{cases}$ **और यदि** $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$, **तो** a **और** b **के सम्भव मान क्या हैं?**

हल दिया है, $f(x) = \begin{cases} a + bx, & x < 1 \\ 4, & x = 1 \\ b - ax, & x > 1 \end{cases}$

$x = 1$ पर, $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$ (दिया है)

अर्थात् दाएँ पक्ष की सीमा = बाएँ पक्ष की सीमा = $f(1)$

$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 4$

$\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} f(1 + h) = \lim_{h \to 0} f(1 - h) = 4$

$\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} b - a(1 + h) = \lim_{h \to 0} a + b(1 - h) = 4$

$\Rightarrow \quad b - a(1 + 0) = a + b(1 - 0) = 4$

$\Rightarrow \quad b - a = a + b = 4$

$\Rightarrow \quad b - a = 4$ तथा $b + a = 4$

हल करने पर $b = 4$ तथा $a = 0$

प्रश्न 29. माना $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ अचर वास्तविक संख्याएँ हैं और एक फलन $f(x)$ निम्न प्रकार परिभाषित है

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$$

$\lim_{x \to a_1} f(x)$ क्या है? $a \neq a_1, a_2, \ldots, a_n$ के लिए $\lim_{x \to a} f(x)$ का परिकलन कीजिए।

हल दिया है, $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$

$\therefore \quad \lim_{x \to a_1} f(x) = \lim_{x \to a_1} (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$

$= (a_1 - a_1)(a_1 - a_2) \ldots (a_1 - a_n)$

$= 0 \times (a_1 - a_2) \ldots (a_1 - a_n) = 0$

पुनः $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$

$= (a - a_1)(a - a_2) \ldots (a - a_n)$

प्रश्न 30. यदि $f(x) = \begin{cases} |x| + 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ |x| - 1, & x > 0 \end{cases}$, तो a के किन मानों के लिए $\lim_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व है?

हल दिया है, $f(x) = \begin{cases} |x| + 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ |x| - 1, & x > 0 \end{cases}$

बिंदु $x = 0$ पर,

दाएँ पक्ष की सीमा $= \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0 + h) = \lim_{h \to 0} |0 + h| - 1$

$= \lim_{h \to 0} h - 1 = 0 - 1 = -1$

बाएँ पक्ष की सीमा $= \lim_{h \to 0^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f|0-h| = \lim_{h \to 0} |0-h| + 1$

$= \lim_{h \to 0} -(0-h) + 1 = \lim_{h \to 0} h + 1 = 0 + 1 = 1$

$\Rightarrow$ दाएँ पक्ष की सीमा $\neq$ बाएँ पक्ष की सीमा

$\therefore$ बिंदु $x = 0$, पर, सीमा का अस्तित्व नहीं हैं।

अत: $a \neq 0$ के सभी मानों के लिए $\lim_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व है।

प्रश्न 31. **यदि फलन $f(x)$ $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-2}{x^2-1} = \pi$, को संतुष्ट करता है, तो $\lim_{x \to 1} f(x)$ का मान ज्ञात कीजिए।**

यहाँ हम निम्न गुण $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ का प्रयोग करके फलन को सरल करेंगे।

हल दिया है, $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-2}{x^2-1} = \pi \Rightarrow \frac{\lim_{x \to 1} [f(x)-2]}{\lim_{x \to 1} (x^2-1)} = \pi$

$\Rightarrow \lim_{x \to 1} [f(x)-2] = \pi \lim_{x \to 1} (x^2-1)$

$\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) - 2 = \pi (1^2 - 1)$

$\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) - 2 = \pi \times 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) - 2 = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 2$

प्रश्न 32. **किन पूर्णांकों m और n के लिए, $\lim_{x \to 0} f(x)$ और $\lim_{x \to 1} f(x)$ दोनों का अस्तित्व है,**

यदि $f(x) = \begin{cases} mx^2 + n, & x < 0 \\ nx + m, & 0 \leq x \leq 1 \\ nx^3 + m, & x > 1 \end{cases}$

हल यदि बिंदु $x = 0$ पर सीमा का अस्तित्व है।

तब, दाएँ पक्ष की सीमा = बाएँ पक्ष की सीमा

$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} f(0+h) = \lim_{h \to 0} f(0-h)$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} n(0+h) + m = \lim_{h \to 0} m(0-h)^2 + n$

$\Rightarrow n(0+0) + m = m(0-0)^2 + n$

$\Rightarrow m = n$ ...(i)

पुन: बिंदु $x = 1$ पर सीमा का अस्तित्व है।

$\Rightarrow$ दाएँ पक्ष की सीमा = बाएँ पक्ष की सीमा

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} f(1+h) = \lim_{h \to 0} f(1-h)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} n(1+h)^3 + m = \lim_{h \to 0} n(1-h) + m$$

$$\Rightarrow \quad n(1+0)^3 + m = n(1-0) + m$$

$$\Rightarrow \quad n + m = m + n \qquad \ldots\text{(ii)}$$

अतः समी (i) से $m = n$ के लिए $\lim_{x \to 0} f(x)$ का अस्तित्व है और m तथा n के किसी पूर्णांक के लिए।

समी (ii) से $\lim_{x \to 1} f(x)$ का अस्तित्व है

प्रश्नावली 13.2

(प्र. सं. 1 - 4) हम फलन $f(x)$ का अवकलज निम्न सूत्र

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ का प्रयोग करके ज्ञात करेंगे।

प्रश्न 1. $x = 10$ पर $x^2 - 2$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल माना $f(x) = x^2 - 2$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^2 - 2)] - (x^2 - 2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh - 2 - x^2 + 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h + 2x)}{h} = 0 + 2x = 2x$$

बिंदु $x = 10$ पर, $f'(10) = 2 \times 10 = 20$

प्रश्न 2. $x = 100$ पर $99x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल माना $f(x) = 99x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{99(x+h) - 99x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{99x + 99h - 99x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{99h}{h} = 99$$

बिंदु $x = 100$ पर, $f'(100) = 99$

प्रश्न 3. $x = 1$ पर x का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल माना $f(x) = x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

बिंदु $x = 1$ पर $f'(1) = 1$

प्रश्न 4. प्रथम सिद्धांत से निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए।

(i) $x^3 - 27$ (ii) $(x-1)(x-2)$ (iii) $\frac{1}{x^3}$ (iv) $\frac{x+1}{x-1}$

हल (i) माना $f(x) = x^3 - 27$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 - 27] - (x^3 - 27)}{h} \qquad [\because f(x) = x^3 - 27]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + h^3 + 3xh(x+h) - x^3}{h}$$

$$[\because (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^3 + 3xh(x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h[h^2 + 3x(x+h)]}{h}$$

$$= 0 + 3x(x+0) = 3x^2$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2$$

(ii) माना $f(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 2x - x + 2$

$$\Rightarrow \quad f(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^2 - 3(x+h) + 2] - (x^2 - 3x + 2)}{h}$$

$$[\because f(x) = x^2 - 3x + 2]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh - 3x - 3h + 2 - x^2 + 3x - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2xh - 3h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h + 2x - 3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h + 2x - 3 = 0 + 2x - 3 = 2x - 3$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 2x - 3$$

(iii) माना $f(x) = \frac{1}{x^3}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^3} - \frac{1}{x^3}}{h} \qquad \left(\because f(x) = \frac{1}{x^3}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 - (x+h)^3}{(x+h)^3 x^3 h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 - [x^3 + h^3 + 3xh(x+h)]}{(x+h)^3 x^3 h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h^3 - 3xh(x+h)}{(x+h)^3 x^3 h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h[h^2 + 3x(x+h)]}{(x+h)^3 x^3 h}$$

$$= \frac{-[0 + 3x(x+0)]}{(x+0)^3 x^3} = \frac{-3x^2}{x^3 x^3} = \frac{-3}{x^4}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-3}{x^4}$$

(iv) माना $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x+h+1}{x+h-1} - \dfrac{x+1}{x-1}}{h} \qquad \left(\because f(x) = \frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h+1)(x-1) - (x+1)(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2 - x + hx - h + x - 1) - (x^2 + hx - x + x + h - 1)}{(x+h-1)(x-1)h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + hx - h - 1 - x^2 - hx - h + 1}{(x+h-1)(x-1)h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{(x+h-1)(x-1)h} = \frac{-2}{(x+0-1)(x-1)} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

प्रश्न 5. **फलन $f(x) = \dfrac{x^{100}}{100} + \dfrac{x^{99}}{99} + \ldots + \dfrac{x^2}{2} + x + 1$ के लिए सिद्ध कीजिए कि**

$$f'(1) = 100 f'(0).$$

(प्र. सं. 5 - 7) यहाँ हम निम्न सम्बन्ध $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ प्रयोग कर सरल करेंगे।

हल दिया है, $f(x) = \dfrac{x^{100}}{100} + \dfrac{x^{99}}{99} + \ldots + \dfrac{x^2}{2} + x + 1$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{100x^{99}}{100} + \frac{99x^{98}}{99} + \ldots + \frac{2x}{2} + 1 + 0$$

$$[\because f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}]$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = x^{99} + x^{98} + \ldots + x + 1 \qquad \ldots(i)$$

$x = 1$ रखने पर,

$$f'(1) = \underbrace{(1)^{99} + 1^{98} + \ldots + 1 + 1}_{100 \text{ बार}} = \underbrace{1 + 1 + 1 \ldots + 1 + 1}_{100 \text{ बार}}$$

$$\Rightarrow \quad f'(1) = 100 \qquad \ldots(ii)$$

पुनः $x = 0$ रखने पर,

$$f'(0) = 0 + 0 + \ldots + 0 + 1$$

$$\Rightarrow \quad f'(0) = 1 \qquad \ldots(iii)$$

समी (ii) तथा (iii) से, $\quad f'(1) = 100 f'(0)$

प्रश्न 6. किसी निश्चित वास्तविक संख्या a के लिए

$$x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \ldots + a^{n-1}x + a^n$$

का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल माना $f(x) = x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \ldots + a^{n-1}x + a^n$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$f'(x) = nx^{n-1} + a(n-1)x^{n-1-1} + a^2(n-2)x^{n-2-1} + \ldots + a^{n-1}(1) + 0$$

$$[\because f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = anx^{n-1}]$$

$\Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1} + a(n-1)x^{n-2} + a^2(n-2)x^{n-3} + \ldots + a^{n-1}$

प्रश्न 7. किन्हीं अचरों a और b के लिए निम्न फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए।

(i) $(x-a)(x-b)$ (ii) $(ax^2+b)^2$ (iii) $\dfrac{x-a}{x-b}$

हल (i) माना $f(x) = (x-a)(x-b) = x^2 - ax - bx + ab = x^2 - (a+b)x + ab$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$f'(x) = 2x - (a+b)1 + 0 = 2x - a - b$$

(ii) माना $f(x) = (ax^2+b)^2$

$\Rightarrow \quad f(x) = a^2x^4 + b^2 + 2abx^2$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$f'(x) = 4a^2x^3 + 0 + 2ab(2x) = 4a^2x^3 + 4abx = 4ax(ax^2+b)$$

(iii) माना $\quad f(x) = \dfrac{x-a}{x-b}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$f'(x) = \frac{(x-b)\frac{d}{dx}(x-a) - (x-a)\frac{d}{dx}(x-b)}{(x-b)^2}$$

$$= \frac{(x-b)(1-0) - (x-a)(1-0)}{(x-b)^2} = \frac{(x-b)-(x-a)}{(x-b)^2}$$

$$\left[\because f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]$$

$\therefore \quad f'(x) = \dfrac{f_2(x) f_1'(x) - f_1(x) f_2'(x)}{\{f_2(x)\}^2}$

$$= \frac{x-b-x+a}{(x-b)^2} = \frac{a-b}{(x-b)^2}$$

प्रश्न 8. किसी अचर a के लिए $\dfrac{x^n - a^n}{x-a}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

यहाँ हम अवकलज ज्ञात करने के लिए निम्न भागफल सूत्र अर्थात् का प्रयोग करेंगे।

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{\{g(x)\}^2}$$

हल माना $y = \frac{x^n - a^n}{x - a}$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-a)\frac{d}{dx}(x^n - a^n) - (x^n - a^n)\frac{d}{dx}(x-a)}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{(x-a)[nx^{n-1} - 0] - (x^n - a^n)(1-0)}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{(x-a)nx^{n-1} - x^n + a^n}{(x-a)^2} = \frac{x \times nx^{n-1} - anx^{n-1} - x^n + a^n}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{nx^n - anx^{n-1} - x^n + a^n}{(x-a)^2}$$

प्रश्न 9. निम्नलिखित के अवकलज ज्ञात कीजिए।

(i) $2x - \frac{3}{4}$ (ii) $(5x^3 + 3x - 1)(x-1)$ (iii) $x^{-3}(5 + 3x)$

(iv) $x^5(3 - 6x^{-9})$ (v) $x^{-4}(3 - 4x^{-5})$ (vi) $\frac{2}{x+1} - \frac{x^2}{3x-1}$

यहाँ हम नीचे दिए हुए विभिन्न अवकलज सूत्रों का प्रयोग करेंगे

- $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
- $\frac{d}{dx}\{f(x)\,g(x)\} = f(x)\left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\} + g(x)\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}$ (गुणनफल सूत्र)
- $\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \frac{g(x)\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\} - f(x)\left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}}{\{g(x)\}^2}$ (भागफल सूत्र)

हल (i) माना $y = 2x - \frac{3}{4}$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 2 \times 1 - 0 = 2$$

(ii) माना $y = (5x^3 + 3x - 1)(x - 1)$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = (5x^3 + 3x - 1)\frac{d}{dx}(x-1) + (x-1)\frac{d}{dx}(5x^3 + 3x - 1)$$

$$= (5x^3 + 3x - 1)(1 - 0) + (x - 1)(5 \times 3x^2 + 3 \times 1 - 0)$$

$$= (5x^3 + 3x - 1) + (x - 1)(15x^2 + 3)$$

$$= 5x^3 + 3x - 1 + 15x^3 + 3x - 15x^2 - 3$$

$$= 20x^3 - 15x^2 + 6x - 4$$

(iii) माना $y = x^{-3}(5+3x)$

$\Rightarrow \quad y = 5x^{-3} + 3x^{-2}$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 5(-3)x^{-3-1} + 3(-2)x^{-2-1} = -15x^{-4} - 6x^{-3}$$

(iv) माना $y = x^5(3-6x^{-9}) = 3x^5 - 6x^{5-9} = 3x^5 - 6x^{-4}$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 3\times 5x^{5-1} - 6(-4)x^{-4-1} = 15x^4 + 24x^{-5}$$

(v) माना $y = x^{-4}(3-4x^{-5})$

$\Rightarrow \quad y = 3x^{-4} - 4x^{-4-5} \quad \Rightarrow \quad y = 3x^{-4} - 4x^{-9}$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 3(-4)x^{-4-1} - 4(-9)x^{-9-1} = -12x^{-5} + 36x^{-10}$$

(vi) माना $y = \frac{2}{x+1} - \frac{x^2}{3x-1}$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(2) - 2\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{(3x-1)\frac{d}{dx}(x^2) - x^2\frac{d}{dx}(3x-1)}{(3x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)\times 0 - 2\times 1}{(x+1)^2} - \frac{(3x-1)2x - x^2(3)}{(3x-1)^2}$$

$$= -\frac{2}{(x+1)^2} - \frac{(6x^2-2x-3x^2)}{(3x-1)^2} = -\frac{2}{(x+1)^2} - \frac{(3x^2-2x)}{(3x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{(x+1)^2} - \frac{x(3x-2)}{(3x-1)^2}$$

प्रश्न 10. **प्रथम सिद्धांत से $\cos x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।**

यहाँ हम प्रथम सिद्धांत की विधि अर्थात् $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ का प्रयोग करेंगे।

हल माना $f(x) = \cos x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{(प्रथम सिद्धांत द्वारा)}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$\left(\because \cos C - \cos D = -2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{2\times\frac{h}{2}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{-\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\right\}\cdot\left\{\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right\} = -\sin\frac{2x}{2}\times 1 \qquad \left(\because \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1\right)$$

$\Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$

प्रश्न 11. निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए।

(i) $\sin x\cos x$ (ii) $\sec x$ (iii) $5\sec x + 4\cos x$

(iv) $\text{cosec}\, x$ (v) $3\cot x + 5\,\text{cosec}\, x$ (vi) $5\sin x - 6\cos x + 7$

(vii) $2\tan x - 7\sec x$

हल

(i) माना $y = \sin x\cos x$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \sin x\frac{d}{dx}\cos x + \cos x\frac{d}{dx}\sin x \qquad \text{(गुणनफल सूत्र द्वारा)}$$

$$= \sin x(-\sin x) + \cos x\cos x = -\sin^2 x + \cos^2 x = \cos 2x$$

(ii) माना $y = \sec x \Rightarrow y = \frac{1}{\cos x}$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x\frac{d}{dx}(1) - 1\times\frac{d}{dx}\cos x}{\cos^2 x} \qquad \text{(भागफल सूत्र द्वारा)}$$

$$= \frac{\cos x\times 0 - 1\times(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \tan x\sec x$$

(iii) माना $y = 5\sec x + 4\cos x$

y का x के सापेक्ष अवकलज करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 5\sec x\tan x - 4\sin x$$

(iv) माना $y = \text{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x}$

y का x के सापेक्ष अवकलज करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x\frac{d}{dx}(1) - (1)\frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x} \qquad \text{(भागफल सूत्र द्वारा)}$$

$$= \frac{\sin x\times 0 - 1\times\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{0 - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin x}\times\frac{1}{\sin x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\cot x\,\text{cosec}\, x$$

(v) माना $y = 3\cot x + 5\,\text{cosec}\, x$

y का x के सापेक्ष अवकलज करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = -3\,\text{cosec}^2 x - 5\,\text{cosec}\, x\cot x$$

(vi) माना $y = 5\sin x - 6\cos x + 7$

y का x, के सापेक्ष अवकलज करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 5\cos x - 6(-\sin x) + 0 = 5\cos x + 6\sin x$$

(vii) माना $y = 2\tan x - 7\sec x$

y का x के सापेक्ष अवकलज करने पर, $\frac{dy}{dx} = 2\sec^2 x - 7\sec x \tan x$

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. प्रथम सिद्धांत से निम्नलिखित फलनों का अवकलज ज्ञात कीजिए

(i) $-x$ (ii) $(-x)^{-1}$ (iii) $\sin(x+1)$ (iv) $\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$

हल (i) माना $f(x) = -x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} \quad \text{(प्रथम सिद्धांत द्वारा)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-x - h + x}{h} \quad [\because f(x) = -x]$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1$$

(ii) माना $f(x) = (-x)^{-1}$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{(प्रथम सिद्धांत द्वारा)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{1}{x+h} + \frac{1}{x}}{h} \quad \left(\because f(x) = \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{x(x+h)h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{x(x+h)h} = \frac{1}{x(x+0)} = \frac{1}{x^2}$$

(iii) $f(x) = \sin(x+1)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{(प्रथम सिद्धांत द्वारा)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h+1) - \sin(x+1)}{h} \quad [\because f(x) = \sin(x+1)]$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{x+h+1+x+1}{2} \cdot \sin\frac{x+h+1-x-1}{2}}{h}$$

$$\left[\because \sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\frac{2x+h+2}{2}\sin\frac{h}{2}}{2 \times \frac{h}{2}} = \cos\frac{2x+0+2}{2} \times 1 \quad \left(\because \lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x+1)$$

(iv) माना $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ (प्रथम सिद्धांत द्वारा)

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos\left(x + h - \frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right)}{h} \quad \left[\because f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right)\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2\sin\frac{x+h-\frac{\pi}{8}+x-\frac{\pi}{8}}{2}\sin\frac{x+h-\frac{\pi}{8}-x+\frac{\pi}{8}}{2}}{h}$$

$$\left(\because \cos C - \cos D = -2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2\sin\frac{2x-2\left(\frac{\pi}{8}\right)+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{2 \times \frac{h}{2}}$$

$$= -\sin\frac{2x-2\left(\frac{\pi}{8}\right)+0}{2} \times 1 \quad \left(\because \lim_{x \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1\right)$$

$$= -\sin\frac{2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)}{2} \Rightarrow f'(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$$

निर्देश (प्र. सं. 2 - 30) निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए (यहाँ a, b, c, d, p, q, r और s निश्चित अशून्य अचर हैं और m तथा n पूर्णांक है।)

प्रश्न 2. $x + a$

हल माना $y = x + a$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = 1 + 0 = 1$

प्रश्न 3. $(px + q)\left(\frac{r}{x} + s\right)$

हल माना $y = (px + q)\left(\frac{r}{x} + s\right)$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = (px+q)\frac{d}{dx}\left(\frac{r}{x}+s\right)+\left(\frac{r}{x}+s\right)\frac{d}{dx}(px+q)$$ (गुणनफल विधि द्वारा)

$$= (px+q)\left[-\frac{r}{x^2}+0\right]+\left(\frac{r}{x}+s\right)(p\times 1+0)$$

$$\left[\because \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{d}{dx}(x^{-1})=(-1)\,x^{-1-1}=-\frac{1}{x^2}\right]$$

$$= (px+q)\left(-\frac{r}{x^2}\right)+\left(\frac{r}{x}+s\right)p$$

$$= -\frac{pxr}{x^2}-\frac{qr}{x^2}+\frac{pr}{x}+ps = -\frac{pr}{x}-\frac{qr}{x^2}+\frac{pr}{x}+ps$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = ps-\frac{qr}{x^2}$$

प्रश्न 4. $(ax+b)(cx+d)^2$

हल माना $y=(ax+b)(cx+d)^2$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = (ax+b)\frac{d}{dx}(cx+d)^2+(cx+d)^2\frac{d}{dx}(ax+b)$$ (गुणनफल विधि द्वारा)

$$= (ax+b)\frac{d}{dx}(c^2x^2+d^2+2cxd)+(cx+d)^2(a\times 1+0)$$

$$[\because (a+b)^2=a^2+2ab+b^2]$$

$$= (ax+b)(c^2(2x)+0+2c\times 1\times d)+(cx+d)^2\times a$$

$$= (ax+b)(2c^2x+2cd)+a(cx+d)^2$$

$$= (ax+b)\,2c\,(cx+d)+a(cx+d)^2$$

$$= (cx+d)[2c(ax+b)+a(cx+d)]$$

$$= (cx+d)(2acx+2bc+acx+ad)$$

$$= (cx+d)(3acx+2bc+ad)$$

प्रश्न 5. $\dfrac{ax+b}{cx+d}$

हल माना $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(cx+d)\frac{d}{dx}(ax+b)-(ax+b)\frac{d}{dx}(cx+d)}{(cx+d)^2}$$ (भागफल विधि द्वारा)

$$= \frac{(cx+d)(a\times 1+0)-(ax+b)(c\times 1+0)}{(cx+d)^2} = \frac{a(cx+d)-(ax+b)c}{(cx+d)^2}$$

$$= \frac{acx+ad-acx-bc}{(cx+d)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

प्रश्न 6. $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

हल माना $y = \dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \Rightarrow y = \dfrac{x+1}{x-1}$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)\frac{d}{dx}(x+1) - (x+1)\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2} \quad \text{(भागफल सूत्र द्वारा)}$$

$$= \frac{(x-1)(1+0)-(x+1)(1-0)}{(x-1)^2} \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

प्रश्न 7. $\dfrac{1}{(ax^2+bx+c)}$

हल माना $y = \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax^2+bx+c)\frac{d}{dx}(1) - 1\times\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)}{(ax^2+bx+c)^2} \quad \text{(भागफल सूत्र द्वारा)}$$

$$= \frac{(ax^2+bx+c)\times 0 - 1\times(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

प्रश्न 8. $\dfrac{ax+b}{px^2+qx+r}$

हल माना $y = \dfrac{ax+b}{px^2+qx+r}$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(px^2+qx+r)\frac{d}{dx}(ax+b) - (ax+b)\frac{d}{dx}(px^2+qx+r)}{(px^2+qx+r)^2} \quad \text{(भागफल सूत्र द्वारा)}$$

$$= \frac{(px^2+qx+r)(a\times 1+0)-(ax+b)(2px+q)}{(px^2+qx+r)^2}$$

$$= \frac{(px^2+qx+r)a-(ax+b)(2px+q)}{(px^2+qx+r)^2}$$

$$= \frac{(apx^2 + aqx + ra) - (2apx^2 + aqx + 2bpx + qb)}{(px^2 + qx + r)^2}$$

$$= \frac{apx^2 + aqx + ra - 2apx^2 - aqx - 2bpx - bq}{(px^2 + qx + r)^2}$$

$$= \frac{-apx^2 - 2bpx + ra - bq}{(px^2 + qx + r)^2}$$

प्रश्न 9. $\dfrac{px^2 + qx + r}{ax + b}$

हल ~~माना~~ $y = \dfrac{px^2 + qx + r}{(ax + b)}$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax + b)\frac{d}{dx}(px^2 + qx + r) - (px^2 + qx + r)\frac{d}{dx}(ax + b)}{(ax + b)^2}$$

(भागफल सूत्र द्वारा)

$$= \frac{(ax + b)(2px + q + 0) - (px^2 + qx + r)(a \times 1 + 0)}{(ax + b)^2}$$

$$= \frac{(ax + b)(2px + q) - (px^2 + qx + r)a}{(ax + b)^2}$$

$$= \frac{(2apx^2 + aqx + 2bpx + bq) - (apx^2 + aqx + ra)}{(ax + b)^2}$$

$$= \frac{2apx^2 + aqx + 2bpx + bq - apx^2 - aqx - ra}{(ax + b)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{apx^2 + 2bpx + bq - ra}{(ax + b)^2}$$

प्रश्न 10. $\dfrac{a}{x^4} - \dfrac{b}{x^2} + \cos x$

हल माना $y = \dfrac{a}{x^4} - \dfrac{b}{x^2} + \cos x$

$$\Rightarrow \quad y = ax^{-4} - bx^{-2} + \cos x$$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{d}{dx}(x^{-4}) - b\frac{d}{dx}(x^{-2}) + \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= a(-4)x^{-4-1} - b(-2)x^{-2-1} - \sin x \qquad \left(\because \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}\right)$$

$$= -\frac{4a}{x^5} + \frac{2b}{x^3} - \sin x$$

प्रश्न 11. $4\sqrt{x} - 2$

हल माना $y = 4\sqrt{x} - 2$

$\Rightarrow \quad y = 4x^{1/2} - 2$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 4 \times \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} - 0 = 2x^{\frac{-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

प्रश्न 12. $(ax + b)^n$.

(प्र. सं. 12 - 13) यहाँ हमें फलनों के फलन जैसे $y = f\{g(x)\}$ दिये हुए है। यहाँ f g का फलन है और g x का फलन x है इस प्रकार के फलनों का अवकलज निम्न सूत्र $\frac{dy}{dx} \equiv f'\{g(x)\}.g'(x)$ से दिया जाता है।

अतः सर्वप्रथम बाहरी फलन का अवकलन करते हैं और तब अंदर वाले फलन का अवकलन करते हैं। यह प्रथम अवकलन का शृंखला नियम कहलाती है।

हल माना $y = (ax + b)^n$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = n(ax + b)^{n-1} \frac{d}{dx}(ax + b)$$

$$= n(ax + b)^{n-1} \times a$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = na(ax + b)^{n-1}$$

प्रश्न 13. $(ax + b)^n (cx + d)^m$

हल माना $y = (ax + b)^n (cx + d)^m$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = (ax + b)^n \frac{d}{dx}(cx + d)^m + (cx + d)^m \frac{d}{dx}(ax + b)^n$$

$$= (ax + b)^n\, m(cx + d)^{m-1} \frac{d}{dx}(cx + d) + (cx + d)^m\, n(ax + b)^{n-1} \frac{d}{dx}(ax + b)$$

$$= m(ax + b)^n (cx + d)^{m-1} (c \times 1 + 0) + n(cx + d)^m (ax + b)^{n-1} (a \times 1 + 0)$$

$$= m(ax + b)^n (cx + d)^{m-1} c + n(cx + d)^m (ax + b)^{n-1} a$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = (ax + b)^{n-1} (cx + d)^{m-1} [mc(ax + b) + na(cx + d)]$$

प्रश्न 14. $\sin(x + a)$

हल माना $y = \sin(x + a)$

$$y = \sin x \cos a + \cos x \sin a$$

$[\because \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B]$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \cos a \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin a \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= \cos a \cos x - \sin a \sin x = \cos(x + a)$$

प्रश्न 15. cosec x cot x.

हल माना $y = \text{cosec } x \cot x$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \text{cosec } x \frac{d}{dx}(\cot x) + \cot x \frac{d}{dx}(\text{cosec } x) \qquad \text{(गुणनफल विधि द्वारा)}$$

$$= -\text{cosec } x \,\text{cosec}^2 x + \cot x\,(-\text{cosec } x \cot x)$$

$$= -\text{cosec}^3 x - \cot^2 x \,\text{cosec } x$$

प्रश्न 16. $\dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$

हल माना $y = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(1 + \sin x)}{(1+\sin x)^2} \qquad \text{(भागफल सूत्र द्वारा)}$$

$$= \frac{(1+\sin x)(-\sin x) - \cos x\,(0 + \cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-\sin x - (\cos^2 x + \sin^2 x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - 1}{(1+\sin x)^2} \quad \frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{-1}{(1+\sin x)}$$

प्रश्न 17. $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

हल माना $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sin x - \cos x)\frac{d}{dx}(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)\frac{d}{dx}(\sin x - \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

(भागफल सूत्र द्वारा)

$$= \frac{(\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-(\cos x - \sin x)(\cos x - \sin x) - (\cos x + \sin x)^2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-(\cos x - \sin x)^2 - (\cos x + \sin x)^2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-[(\cos^2 x + \sin^2 x - 2\cos x \sin x) + (\cos^2 x + \sin^2 x + 2\cos x \sin x)]}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-[1+1]}{(\sin x - \cos x)^2} \quad \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

प्रश्न 18. $\dfrac{\sec x - 1}{\sec x + 1}$

हल माना $y = \dfrac{\sec x - 1}{\sec x + 1}$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sec x + 1)\frac{d}{dx}(\sec x - 1) - (\sec x - 1)\frac{d}{dx}(\sec x + 1)}{(\sec x + 1)^2}$$

(भागफल सूत्र विधि)

$$= \frac{(\sec x + 1)(\sec x \tan x - 0) - (\sec x - 1)(\sec x \tan x + 0)}{(\sec x + 1)^2}$$

$$= \frac{(\sec x + 1)(\sec x \tan x) - (\sec x - 1)(\sec x \tan x)}{(\sec x + 1)^2}$$

$$= \frac{\sec x \tan x\ [\sec x + 1 - \sec x + 1]}{(\sec x + 1)^2} \quad \frac{2\sec x \tan x}{(\sec x + 1)^2}$$

प्रश्न 19. $\sin^n x$

यहाँ हम अवकलन का श्रृंखला नियम प्रयोग करेंगे।

हल माना $y = \sin^n x \Rightarrow y = (\sin x)^n$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = n(\sin x)^{n-1} \times \frac{d}{dx}(\sin x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = n\sin^{n-1} x \cos x$$

प्रश्न 20. $\dfrac{a + b\sin x}{c + d\cos x}$

हल माना $y = \dfrac{a + b\sin x}{c + d\cos x}$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(c + d\cos x)\frac{d}{dx}(a + b\sin x) - (a + b\sin x)\frac{d}{dx}(c + d\cos x)}{(c + d\cos x)^2}$$

$$= \frac{(c + d\cos x)[0 + b\cos x] - (a + b\sin x)(0 - d\sin x)}{(c + d\cos x)^2}$$

$$= \frac{(c + d\cos x)(b\cos x) - (a + b\sin x)(-d\sin x)}{(c + d\cos x)^2}$$

$$= \frac{bc\cos x + bd\cos^2 x + ad\sin x + bd\sin^2 x}{(c + d\cos x)^2}$$

$$= \frac{bc\cos x + ad\sin x + bd(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(c + d\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{bc\cos x + ad\sin x + bd}{(c + d\cos x)^2}$$

प्रश्न 21. $\dfrac{\sin(x+a)}{\cos x}$

हल माना
$$y=\frac{\sin(x+a)}{\cos x}=\frac{\sin x\cos a+\cos x\sin a}{\cos x}$$
(सूत्र $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$)
$$=\frac{\sin x\cos a}{\cos x}+\frac{\cos x\sin a}{\cos x}=\cos a\tan x+\sin a$$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,
$$\frac{dy}{dx}=\cos a\frac{d}{dx}(\tan x)+\frac{d}{dx}(\sin a)$$
$$=\cos a\sec^2 x+0 \qquad \left[\because \frac{d}{dx}(\text{नियतांक})=0\right]$$
$$=\frac{\cos a}{\cos^2 x} \qquad \left(\because \cos x=\frac{1}{\sec x}\right)$$

प्रश्न 22. $x^4(5\sin x-3\cos x)$

हल माना $y=x^4(5\sin x-3\cos x)$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,
$$\frac{dy}{dx}=x^4\frac{d}{dx}(5\sin x-3\cos x)+(5\sin x-3\cos x)\frac{d}{dx}(x^4)$$
(गुणनफल सूत्र द्वारा)
$$=x^4(5\cos x+3\sin x)+(5\sin x-3\cos x)4x^3$$
$$=x^3[x(5\cos x+3\sin x)+4(5\sin x-3\cos x)]$$
$$=x^3[5x\cos x+3x\sin x+20\sin x-12\cos x]$$

प्रश्न 23. $(x^2+1)\cos x$

हल माना $y=(x^2+1)\cos x$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,
$$\frac{dy}{dx}=(x^2+1)\frac{d}{dx}(\cos x)+\cos x\frac{d}{dx}(x^2+1)$$
(गुणनफल सूत्र द्वारा)
$$=(x^2+1)(-\sin x)+\cos x(2x)$$
$$=-x^2\sin x-\sin x+2x\cos x$$

प्रश्न 24. $(ax^2+\sin x)(p+q\cos x)$

हल माना $y=(ax^2+\sin x)(p+q\cos x)$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,
$$\frac{dy}{dx}=(ax^2+\sin x)\frac{d}{dx}(p+q\cos x)+(p+q\cos x)\frac{d}{dx}(ax^2+\sin x)$$
(गुणनफल सूत्र द्वारा)
$$=(ax^2+\sin x)(0-q\sin x)+(p+q\cos x)(2ax+\cos x)$$
$$=-q\sin x(ax^2+\sin x)+(p+q\cos x)(2ax+\cos x)$$

प्रश्न 25. $(x + \cos x)(x - \tan x)$

हल माना $y = (x + \cos x)(x - \tan x)$

y का x के सोपेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = (x + \cos x)\frac{d}{dx}(x - \tan x) + (x - \tan x)\frac{d}{dx}(x + \cos x) \quad \text{(गुणनफल सूत्र द्वारा)}$$

$$= (x + \cos x)(1 - \sec^2 x) + (x - \tan x)(1 - \sin x)$$

$$= -(x + \cos x)(\sec^2 x - 1) + (x - \tan x)(1 - \sin x)$$

$$= -(x + \cos x)\tan^2 x + (x - \tan x)(1 - \sin x) \quad (\because \sec^2 x - \tan^2 x = 1)$$

प्रश्न 26. $\dfrac{4x + 5\sin x}{3x + 7\cos x}$

हल माना $y = \dfrac{4x + 5\sin x}{3x + 7\cos x}$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x + 7\cos x)\frac{d}{dx}(4x + 5\sin x) - (4x + 5\sin x)\frac{d}{dx}(3x + 7\cos x)}{(3x + 7\cos x)^2} \quad \text{(भागफल सूत्र द्वारा)}$$

$$= \frac{(3x + 7\cos x)(4 \times 1 + 5\cos x) - (4x + 5\sin x)(3 - 7\sin x)}{(3x + 7\cos x)^2}$$

$$= \frac{12x + 15x\cos x + 28\cos x + 35\cos^2 x - 12x + 28x\sin x - 15\sin x + 35\sin^2 x}{(3x + 7\cos x)^2}$$

$$= \frac{35(\cos^2 x + \sin^2 x) + 15x\cos x + 28\cos x + 28x\sin x - 15\sin x}{(3x + 7\cos x)^2}$$

$$= \frac{35 + 15x\cos x + 28\cos x + 28x\sin x - 15\sin x}{(3x + 7\cos x)^2} \quad (\because \sin^2 x + \cos^2 x = 1)$$

प्रश्न 27. $\dfrac{x^2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$

हल माना $y = \dfrac{x^2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x} \Rightarrow y = \left(\cos\dfrac{\pi}{4}\right) \times \dfrac{x^2}{\sin x}$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \cos\frac{\pi}{4} \times \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{\sin x}\right) \quad \left(\because \cos\frac{\pi}{4} \text{ एक नियतांक है}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\cos\frac{\pi}{4}\right) \times \frac{\sin x\frac{d}{dx}(x^2) - x^2\left(\frac{d}{dx}\sin x\right)}{\sin^2 x} \quad \text{(भागफल सूत्र द्वारा)}$$

$$= \cos\frac{\pi}{4} \times \frac{(\sin x)(2x) - x^2(\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{x\cos\frac{\pi}{4}[2\sin x - x\cos x]}{\sin^2 x}$$

प्रश्न 28. $\frac{x}{1+\tan x}$

हल माना $y=\frac{x}{1+\tan x}$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+\tan x)\frac{d}{dx}(x)-x\frac{d}{dx}(1+\tan x)}{(1+\tan x)^2}$$

$$=\frac{(1+\tan x)(1)-x(0+\sec^2 x)}{(1+\tan x)^2}=\frac{1+\tan x-x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

प्रश्न 29. $(x+\sec x)(x-\tan x)$

हल माना $y=(x+\sec x)(x-\tan x)$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=(x+\sec x)\frac{d}{dx}(x-\tan x)+(x-\tan x)\frac{d}{dx}(x+\sec x) \qquad \text{(गुणनफल सूत्र द्वारा)}$$

$$=(x+\sec x)(1-\sec^2 x)+(x-\tan x)(1+\sec x\tan x)$$

प्रश्न 30. $\frac{x}{\sin^n x}$

हल माना $y=\frac{x}{\sin^n x}$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin^n x\frac{d}{dx}(x)-x\frac{d}{dx}(\sin^n x)}{(\sin^n x)^2} \qquad \text{(भागफल सूत्र द्वारा)}$$

$$=\frac{\sin^n x\times 1-x\frac{d}{dx}(\sin x)^n}{\sin^{2n} x}$$

शृंखला नियम द्वारा $(\sin x)^n$ का अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin^n x-nx(\sin x)^{n-1}\frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^{2n} x}=\frac{\sin^n x-nx\sin^{n-1} x\cos x}{\sin^{2n} x}$$